POTENZREGELN

$\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$ $\quad \frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$

$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$ $\quad \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$

$(3x^3 \cdot y)^2 = (3)^2 \cdot \boxed{(x^3)^2} \cdot y^2 = 9 \cdot \boxed{x^6} \cdot y^2$

FUNKTIONEN AUFLÖSEN (NULLSTELLEN)

Möglichkeit 1: Einfaches Auflösen

Bsp.: $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Möglichkeit 2: pq-Formel

$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Möglichkeit 3: Ausklammern

Bsp.: $f(x) = 4x^3 - 8x^2 \Rightarrow x^2(4x - 8) = 0$

$x_1 = 0$ oder $4x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

Merke: Immer die kleinste Potenz ausklammern!

ÖKONOMISCHE FUNKTIONEN

Deckungsbeitrag:	$G_D(x) = E(x) - K_v(x)$
Gewinn:	$G(x) = E(x) - K(x)$
Stückgewinn:	$g(x) = \frac{G(x)}{x}$
Erlös (Umsatz):	$E(x) = p(x) \cdot x$
Grenzerlös:	$E'(x)$
Kosten:	$K(x) = K_v(x) + K_f = k(x) \cdot x$
Grenzkosten:	$K'(x)$
Stückkosten:	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Grenzstückkosten:	$k'(x)$

SYNONYME

Gewinnschwelle & -grenze:	$G(x) = 0$ (Nullst.)
Gewinnmaximum:	$G'(x) = 0$ (Extremst.)
Max. Deckungsbeitrag:	$G_D'(x) = 0$ (Extremst.)
Max. Erlös:	$E'(x) = 0$ (Extremst.)
Schwelle d. Ertragsges.:	$K''(x) = 0$ (Wendest.)
Betriebsminimum:	$k_v'(x) = 0$ (Extremst.)
Betriebsoptimum:	$k'(x) = 0$ (Extremst.)

ABLEITUNGSREGELN

Produktregel:

$f(x) = u \cdot v \quad \rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f(x) = 3x \cdot \boxed{e^{x^2}} \quad \rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^{x^2} + 3x \cdot \boxed{e^{x^2} \cdot 2x}$

Quotientenregel:

$f(x) = \frac{u}{v} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2}$

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \quad \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Fall 1: $f(x) = (3x + 1)^4 \quad \rightarrow f'(x) = 4(3x + 1)^3 \cdot 3$

Fall 2: $f(x) = \ln(2x + 5) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x+5} \cdot (2)$

KURVENDISKUSSION

Nullstellen

1. $f(x) = 0$ setzen 2. nach x auflösen

Ordinatenabschnitt

$f(0)$ berechnen

Extremstellen

1. $f'(x)$ und $f''(x)$ bilden
2. $f'(x) = 0$ setzen
3. Lösungen in $f''(x)$:
   - $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Minimum
   - $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Maximum
   - $f''(x) = 0 \Rightarrow$ möglicher Sattelpunkt
   - $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt bestätigt
4. x in $f(x)$ einsetzen

Wendestellen

1. $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ bilden
2. $f''(x) = 0$ setzen
3. Lösungen in $f'''(x)$:
   - $f'''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex
   - $f'''(x) < 0 \Rightarrow$ konkav
   - $f'''(x) = 0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel prüfen
4. x in $f(x)$ einsetzen

ELASTIZITÄTEN

Allgemeine Elastizität: $\varepsilon = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

Preiselastizität: $\varepsilon = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)}$

Partielle Elastizität: $\varepsilon = f'_{x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\vec{x})}$

Interpretation:

$|\varepsilon| < 1$: unelastisch
$|\varepsilon| = 1$: prop. elastisch
$|\varepsilon| > 1$: elastisch

TANGENTE

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Hinweis: x_0 = x-Wert aus Aufgabe.

NIVEAULINIE / HÖHENLINIE

Vorgehen: Funktion gleich dem Wert aus der Aufgabe setzen und nach y auflösen.

Bsp.: $f(x, y) = 2x + 4y$, Niveau: $f(x, y) = 8$

$2x + 4y = 8 \quad (...) \quad \rightarrow \quad$ y = 2 - 0,5x

HOMOGENITÄT

Ziel: λ ausklammern.

Bsp.: $f(x, y) = x^{0,8} \cdot y^{0,7} + 2y^{1,5}$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{0,8} x^{0,8} \cdot \lambda^{0,7} y^{0,7} + 2\lambda^{1,5} y^{1,5}$

$= (...) = \lambda^{1,5} \cdot f(x, y) \rightarrow$ **Grad: 1,5**

Zusatz: Änderung des Funktionswerts, wenn die Variablen um das 3-fache steigen:

$\lambda^{1,5} \rightarrow 3^{1,5} = 5{,}2 \Rightarrow$ 5,2-facher Fkt.wert.

INTEGRALRECHNUNG

Besondere Stammfunktionen:

$f(x) = \frac{2}{x} \rightarrow F(x) = 2\ln(x) \quad f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x$

Merke:: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = |F(b) - F(a)|$

Fläche bei geg. Funktion und geg. Intervall

1. Nullstellen
2. Intervall ggf. unterteilen
3. Integral berechnen

Fläche zwischen zwei Funktionen

1. Gleichsetzen der Funktionen und nach x auflösen
2. $h(x) = f(x) - g(x)$
3. Integral entlang der x-Werte für $h(x)$ ermitteln

Konsumentenrente: $KR = \int_0^{x_0} p(x)\,dx - p_0 \cdot x_0$

Produzentenrente: $PR = p_0 \cdot x_0 - \int_0^{x_0} p_A(x)\,dx$

Hinweis: x_0 und p_0 ergeben sich aus $p(x) = p_A(x)$.

WIR UNTERSTÜTZEN DICH

EXTREMSTELLEN BEI 2 VARIABLEN: HESSE-MATRIX

1. f_x' und f_y' bilden (Gradient)

2. $f_x' = 0$ & $f_y' = 0$ und x & y ermitteln (Ergebnis: $P(x, y)$ = Nullstelle des Gradienten)

3. $P(x, y)$ in Hesse-Matrix einsetzen:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4. Determinante berechnen & interpretieren:

$\det(H_f)(x, y) = a \cdot d - b \cdot c$

$\det(H_f)(x, y) < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\det(H_f)(x, y) > 0 \Rightarrow$ Extremstelle

$\Rightarrow f''_{xx}(x, y) > 0 \Rightarrow$ lok. Minimum

$\Rightarrow f''_{xx}(x, y) < 0 \Rightarrow$ lok. Maximum

LAGRANGE

$\mathcal{L}$ = zu optimierende Funktion + $\lambda \cdot$ (Nebenbedingung)

1. Lagrange-Funktion aufstellen
2. Partiell nach x, y und λ ableiten
3. Ableitungen nach λ umstellen oder erweitern
4. Terme gleichsetzen, x und y bestimmen
5. Ergebnis aus Schritt 4 in $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ einsetzen
6. Ergebnis in zu optimierende Funktion einsetzen

REGELN FÜR MATRIZENRECHNUNG

$A \cdot B \neq B \cdot A \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$A \cdot A^{-1} = I \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Einheitsmatrix)

INVERSE MATRIX

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Wobei gelten muss: $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$

LGS UMSTELLEN

$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}$

SKALARPRODUKT

Produkt von Vektoren erfordert Transponieren: $\vec{x}^T \cdot \vec{y}$

CRAMERSCHE REGEL

Gegeben: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}$

1. Basis-Determinante bestimmen

$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

2. x_1- und x_2-Determinanten bestimmen

$\det(A_{x_1}) = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = e \cdot d - b \cdot f$

$\det(A_{x_2}) = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = a \cdot f - e \cdot c$

3. x_1 und x_2 ermitteln

$x_1 = \frac{\det(A_{x_1})}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_{x_2})}{\det(A)}$

Hinweis: Nur anwendbar wenn $\det(A) \neq 0$.

LINEARE OPTIMIERUNG

Für Textaufgaben:

1. Was ist zu optimieren? $\rightarrow Z = ax + by$
2. Wofür stehen die Variablen? (x, y = Mengen?)
3. Was sind die Nebenbedingungen (NB)?

$ax + by \leq c \quad ax + by \geq c \quad a \leq c \quad a \geq c$

Für die graphische Lösung:

1. Für NB: Schnittpunkte mit Achsen bestimmen (jeweils $x = 0$ und $y = 0$)
2. NB anhand der Schnittpunkte einzeichnen
3. Anhand von $\leq$ und $\geq$ rel. Fläche markieren
4. Zielfunktion einzeichnen: Z-Wert ausdenken, anschließend jeweils $x = 0$ und $y = 0$, abschließend Zielfunktion einzeichnen.
5. Zielfunktion mit dem Geodreieck solange parallel verschieben, bis sie das letzte Mal die NB in der rel. Fläche schneidet.