

Probeklausursammlung

Analysis & Lineare Algebra

6 Probeklausuren · je 45 Minuten · mit Kurzlösungen

Liebe/r Studierende/r,

seit 2016 unterstützen wir als **Team tutoring** Studierende bei der Prüfungsvorbereitung. Gestartet haben wir selber als Studierende an der Hochschule Fresenius und hatten demnach ebenso das Vergnügen, die klassischen "Problemfächer" wie beispielsweise Wirtschaftsmathematik, Statistik oder VWL zu schreiben.

Diese von uns erstellte Probeklausursammlung soll eine Orientierung für den Prüfungsteil Analysis & Lineare Algebra geben. Die Probeklausuren ersetzen jedoch **nicht** die Vorlesung oder die Übung, sondern dienen lediglich als ergänzendes Übungsmaterial.

Viel Erfolg bei der Prüfungsvorbereitung!

Thomas Jansen

Tipp: Cheat-Sheet

Ich habe auch ein **Cheat-Sheet für Analysis & Lineare Algebra** erstellt, welches wichtige Formeln auf einer Seite zusammenfasst. Du kannst das Cheat-Sheet unter folgendem Link herunterladen:

www.tutoring.koeln/cheatsheet

Kontakt & Ansprechpartner

Analysis & Lineare Algebra: Thomas Jansen jansen@tutoring.koeln

Finanzmathematik: Jan Oetker oetker@tutoring.koeln

Alle weiteren Anfragen: info@tutoring.koeln

Probeklausur 1

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Ein Unternehmen produziert für einen Markt, welcher folgender Nachfrage unterliegt:

$$x(p) = 100 - 0,5p$$

Die Grenzkostenfunktion des Unternehmens sei gegeben mit: $K'(x) = 10x + 2$.

Das Unternehmen hat neben den mengenabhängigen Kosten auch fixe Kosten von 20 Geldeinheiten (GE).

- Ermitteln Sie die Deckungsbeitragsfunktion. (3 Punkte)
- Ermitteln Sie den maximalen Deckungsbeitrag des Unternehmens, wenn das Unternehmen einen Marktanteil von 100% besitzt. (3 Punkte)
- Ab welchem Punkt erwirtschaftet das Unternehmen erstmalig einen Gewinn? (3 Punkte)

Aufgabe 2 (7 Punkte)

- Ermitteln Sie den Flächeninhalt, welcher von den unten stehenden Funktionen eingeschlossen wird. (4 Punkte)

$$f(x) = -x^2 \quad g(x) = 2x - 3$$

- Berechnen Sie folgendes Integral. (3 Punkte)

$$\int_{-2}^2 (e^x + 2\sqrt[3]{x} - 4) dx$$

(Tipp: Es liegen keine Nullstellen innerhalb des Intervalls vor.)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Ein Kölner Startup hat die Idee: ein innovatives Kölsch brauen. Hierzu nutzt das Unternehmen ein kompliziertes Verfahren, in welchem es neben Wasser die perfekte Kombination aus Hopfen (h) und Malz (m) finden muss. Eine benachbarte Kneipe möchte für den Abend 500 Liter Kölsch bestellen. Dabei bezahlt das Startup für eine Einheit des Faktors Hopfen 2 € und für eine Einheit des Faktors Malz 8 €. Die dafür notwendige Produktionsfunktion ist im Folgenden abgebildet:

$$x(h, m) = 2\sqrt{h \cdot m}$$

- Ermitteln Sie für die Produktionsfunktion die Menge an Hopfen und Malz, welche das Unternehmen benötigt, um mit minimalen Kosten die Kneipe zu beliefern. (9 Punkte)
- Ermitteln Sie den Homogenitätsgrad der Produktionsfunktion. (2 Punkte)
- Angenommen es werden doppelt so viel Hopfen und Malz eingesetzt – um das wie Vielfache ändert sich die produzierte Menge? (1 Punkt)
- Ermitteln Sie die partielle Elastizität der Produktionsfunktion für Malz, wenn von $h = 10$ Einheiten und $m = 20$ Einheiten eingesetzt werden. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (8 Punkte)

- Berechnen Sie für die unten stehende Matrix A die Determinante und erläutern Sie kurz, ob das zugehörige Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. (4 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Beweisen Sie, dass die Matrix B die Inverse der Matrix A darstellt. (4 Punkte)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$6x + 2y \leq 480$$

$$4x + 4y \leq 400$$

$$3x + 6y \leq 480$$

$$x \leq 75$$

$$y \leq 70$$

$$x, y \geq 0$$

Zu maximierende Funktion: $Z = 3x + 4y$

Lösen Sie das Problem der linearen Optimierung graphisch. Lesen Sie den maximalen Zielfunktionswert anhand der Grafik ab und ermitteln Sie die Höhe des maximalen Zielfunktionswerts.

Probeklausur 2

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$$

- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion. (3 Punkte)
- Ermitteln Sie den Ordinatenabschnitt der Funktion. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Extremstellen der Funktion und klassifizieren Sie diese. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (11 Punkte)

- Berechnen Sie die Fläche, welche von der Funktion und der x -Achse eingeschlossen wird. (4 Punkte)

$$f(x) = x^4 - 16, \quad -4 \leq x \leq 1$$

- Berechnen Sie die Fläche, welche von den unten stehenden Funktionen eingeschlossen wird. (4 Punkte)

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x$$

- Berechnen Sie: (3 Punkte)

$$\int_3^6 (x - 1,5 \cdot \sqrt{x}) \, dx$$

(Tipp: Es liegen keine Nullstellen innerhalb des Intervalls vor.)

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 8x - 8y$:

- den Gradienten, (2 Punkte)
- die Nullstellen des Gradienten, (3 Punkte)
- erläutern Sie außerdem, warum im Punkt $(1, 0)$ keine Extremstelle vorliegt, (2 Punkte)
- die Extremstellen. (4 Punkte)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

- $2 \cdot (A^T \cdot B) - C$ (3 Punkte)
- $A^{-1} \cdot B^T$ (3 Punkte)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 8 \\ x + 2y &\leq 7 \\ x + y &\leq 5 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Zu maximierende Zielfunktion: $Z = 3x + 2y$

- Lösen Sie das Problem der linearen Optimierung graphisch. Zeichnen Sie den zulässigen Bereich und zeigen Sie den Punkt, der den Zielfunktionswert maximiert, innerhalb der Grafik auf. (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Koordinaten (x, y) , die den maximalen Zielfunktionswert liefern, und bestimmen Sie anschließend den maximalen Zielfunktionswert. (2 Punkte)

Probeklausur 3

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Ein Unternehmen produziert ein Gut mit der Stückkostenfunktion $k(x) = 2x^2 - 18x + 60 + \frac{50}{x}$ und kann dieses zu einem Preis von $p = 80$ GE pro Einheit verkaufen, wobei x die produzierte Menge darstellt.

- Ermitteln Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ des Unternehmens. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Deckungsbeitragsfunktion $G_D(x)$ des Unternehmens. (1 Punkt)
- Bestimmen Sie den Bereich, in dem das Unternehmen einen positiven Deckungsbeitrag erwirtschaftet. (3 Punkte)
- Ermitteln Sie das Gewinnmaximum und die dazugehörige optimale Produktionsmenge. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Gewinnfunktion bei $x = 10$. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (8 Punkte)

- Berechnen Sie die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ und der x -Achse im Intervall $[-3, 1]$. (4 Punkte)
- Ermitteln Sie die Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4x - x^2$ im Bereich ihrer Schnittpunkte. (4 Punkte)

© Thomas Jansen · Team tutoring

Prüfungsvorbereitung | Schreibberatung | Statistische Auswertung

Lektorat | KI- & Plagiatprüfung | YouTube-Erklärvideos

 www.tutoring.koeln |  info@tutoring.koeln |  [YouTube](https://www.youtube.com)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Ein Konsument hat folgende Nutzenfunktion: $U(x, y) = x^{0,4} \cdot 2y^{0,6}$. Die Preise der Güter betragen $p_x = 4$ € und $p_y = 6$ €. Das verfügbare Einkommen beträgt $m = 240$ €.

- a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode das Nutzenmaximum des Konsumenten. Berechnen Sie die optimalen Mengen x^* und y^* sowie den maximalen Nutzen. (8 Punkte)

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad c = 4$$

Berechnen Sie, sofern möglich, $c \cdot (A^T \cdot B^T)^T$. (7 Punkte)

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Eine Textilfabrik stellt zwei Produkte her: Hemden (Produkt x) und Hosen (Produkt y). Die Fabrik hat pro Woche maximal 80 Stunden für die Näherei und 60 Stunden für die Verpackung zur Verfügung. Die Herstellung eines Hemdes erfordert 2 Stunden in der Näherei und 1 Stunde in der Verpackung. Die Herstellung einer Hose erfordert 1 Stunde in der Näherei und 1 Stunde in der Verpackung. Der Gewinn pro Hemd beträgt 5 Euro, und der Gewinn pro Hose beträgt 4 Euro.

Die Fabrik muss mindestens 10 Hemden und mindestens 20 Hosen pro Woche produzieren, um die Nachfrage ihrer Hauptkunden zu erfüllen. Aus Qualitätsgründen kann die Fabrik maximal 50 Hemden pro Woche produzieren.

- a) Bestimmen Sie die optimale Produktionsmenge von Hemden und Hosen, die den Gewinn maximiert, unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen. Verwenden Sie dazu die Methode des grafischen Lösens. (10 Punkte)
- b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn der Fabrik basierend auf den optimalen Produktionsmengen. (1 Punkt)

Probeklausur 4

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Gegeben sei folgende gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-9}$$

- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie den Ordinatenabschnitt der Funktion. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Extremstellen der Funktion und klassifizieren Sie diese. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Ein Unternehmen produziert und verkauft ein Produkt auf einem vollkommenen Markt. Die Nachfragefunktion für das Produkt ist gegeben durch $x(p) = -1,5p + 30$, wobei p der Preis pro Einheit in Euro und x die nachgefragte Menge ist. Die Angebotsfunktion des Unternehmens ist gegeben durch $p(x) = 10 + 2x$, wobei p der Preis pro Einheit in Euro und x die angebotene Menge ist.

- Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis p^* und die Gleichgewichtsmenge x^* . (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Ersparnis des Konsumenten im Marktgleichgewicht. (3 Punkte)
- Ermitteln Sie die Produzentenrente im Marktgleichgewicht. (3 Punkte)
- Zeigen Sie die ermittelten Flächen aus den Teilaufgaben b) und c) anhand einer geeigneten Grafik auf. (4 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \ln(xy^2) + y^3$.

- Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der ersten Ordnung. (4 Punkte)
- Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung. (4 Punkte)
- Begründen Sie, warum die Funktion an der Stelle $(-1, 1)$ kein Extremum besitzt. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

- $A \cdot B$ (3 Punkte)
- A^{-1} (3 Punkte)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 6 \\ 2x + y &\leq 10 \\ x &\leq 4 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Zu maximierende Zielfunktion: $Z = 5x + 3y$

- Lösen Sie das Problem der linearen Optimierung graphisch. Zeichnen Sie den zulässigen Bereich und markieren Sie den optimalen Punkt. (6 Punkte)
- Berechnen Sie den maximalen Zielfunktionswert. (2 Punkte)

Probeklausur 5

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = x^4 - 2x^3$$

- Prüfen Sie die Funktion $f(x)$ auf Nullstellen. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Funktion $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. (1 Punkt)
- Prüfen Sie die Funktion $g(x)$ auf mögliche Extrema. (4 Punkte)
- Ermitteln Sie den Ordinatenabschnitt der Funktion $g(x)$. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Preisabsatz-Funktion des Marktes für Taschenrechner sei gegeben mit:

$$p(x) = 100 - 2x$$

- Skizzieren Sie die Preisabsatzfunktion anhand einer geeigneten Grafik. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie, ob die Funktion bei einem Preis von 25 Geldeinheiten preiselastisch oder preisunelastisch ist. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Höhe der Konsumentenrente anhand des in Aufgabenteil b) aufgezeigten Preises. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie anhand der Preis-Absatz-Funktion den maximalen Erlös. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

- Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die stationären Punkte. (3 Punkte)
- Klassifizieren Sie die stationären Punkte mithilfe der Hesse-Matrix. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (12 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie für die gegebenen Matrizen folgende Rechnungen durch:

- $(A + C) \cdot B$ (3 Punkte)
- $A^{-1} + C^T$ (4 Punkte)
- Ermitteln Sie für die folgende Rechnung den Vektor \vec{x} : (5 Punkte)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad \text{mit} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 12 \\ x + 2y &\leq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Zu maximierende Zielfunktion: $Z = 4x + 3y$

Lösen Sie das Problem der linearen Optimierung graphisch und bestimmen Sie den maximalen Zielfunktionswert. (6 Punkte)

Probeklausur 6

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = 2e^{x^3 - 1,5x^2}$$

- Ermitteln Sie den Ordinatenabschnitt der Funktion. (1 Punkt)
- Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie die Extremstellen der Funktion und klassifizieren Sie diese. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Preisabsatzfunktion eines Produktes sei gegeben durch:

$$p(x) = -e^x + 9,39$$

Ermitteln Sie die Konsumentenrente im Punkt $x = 2$. (4 Punkte)

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x, y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2 + 1) - 3x$:

- den Gradienten, (4 Punkte)
- dessen Nullstellen, (4 Punkte)
- und überprüfen Sie die Nullstellen hinsichtlich auftretender Extremstellen. (6 Punkte)

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem: (4 Punkte)

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b) Ermitteln Sie für die folgende Rechnung den Vektor \vec{x} : (4 Punkte)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & -2 \\ 0,95 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Ein kleines Elektronik-Startup baut drei verschiedene Gadgets: den „Robo-Dog“, die „Drone-Mini“ und den „LED-Cube“. Jedes Gadget besteht aus verschiedenen Modulen:

- **Robo-Dog:** 2 Motoren, 3 Sensoren, 1 LED-Panel
- **Drone-Mini:** 4 Motoren, 2 Sensoren, 0 LED-Panels
- **LED-Cube:** 0 Motoren, 1 Sensor, 6 LED-Panels

Jedes Modul wird wiederum aus Rohmaterialien gefertigt:

- **Motor:** 2 Chips, 5 Kabel, 3 Lötzinn
- **Sensor:** 4 Chips, 2 Kabel, 1 Lötzinn
- **LED-Panel:** 1 Chip, 6 Kabel, 2 Lötzinn

- a) Bestimmen Sie eine Input-Output-Matrix M , mit der sich die Anzahl an benötigten Modulen (Motoren, Sensoren, LED-Panels) aus der Anzahl an herzustellenden Gadgets (Robo-Dog, Drone-Mini, LED-Cube) bestimmen lässt. (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie eine Input-Output-Matrix R , mit der sich die Anzahl an benötigten Rohmaterialien (Chips, Kabel, Lötzinn) aus der Anzahl an herzustellenden Modulen (Motoren, Sensoren, LED-Panels) bestimmen lässt. (3 Punkte)
- c) Bestimmen Sie aus den Lösungen von Teilaufgabe a) und b) eine Input-Output-Matrix, mit der sich aus der Anzahl an herzustellenden Gadgets die Anzahl an benötigten Rohmaterialien bestimmen lässt. (3 Punkte)
- d) Ein Messeaussteller bestellt 12 Robo-Dogs, 8 Drone-Minis und 5 LED-Cubes. Bestimmen Sie die Anzahl an Chips, Kabeln und Lötzinn, die das Startup benötigt, um der Bestellung nachkommen zu können. (3 Punkte)

Probeklausur 1 – Kurzlösung

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

Vorab: $p(x) = -2x + 200$, $K_v(x) = \int(10x + 2) dx = 5x^2 + 2x$, $K(x) = 5x^2 + 2x + 20$.

a) Deckungsbeitragsfunktion:

$$\begin{aligned} G_D(x) &= E(x) - K_v(x) = p(x) \cdot x - K_v(x) \\ &= (-2x + 200)x - (5x^2 + 2x) = -2x^2 + 200x - 5x^2 - 2x \\ &= \boxed{-7x^2 + 198x} \end{aligned}$$

Die Deckungsbeitragsfunktion lautet $G_D(x) = \boxed{-7x^2 + 198x}$.

b) Maximaler Deckungsbeitrag:

$$\begin{aligned} G'_D(x) &= -14x + 198 = 0 \quad \dots \quad x^* = \frac{99}{7} \approx 14,14 \\ G''_D(14,14) &= -14 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \\ G_D(14,14) &\approx \boxed{1400,14 \text{ GE}} \end{aligned}$$

Der maximale Deckungsbeitrag beträgt $\boxed{1400,14 \text{ GE}}$ bei einer Menge von $x^* \approx 14,14$.

c) Gewinnschwelle:

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \\ 7x^2 - 198x + 20 &= 0 \quad \dots \\ x_1 &\approx \boxed{0,10} \quad (\text{Gewinnschwelle}), \quad x_2 \approx 28,18 \quad (\text{Gewinngrenze}) \end{aligned}$$

Das Unternehmen erwirtschaftet erstmalig ab $\boxed{0,10 \text{ ME}}$ einen Gewinn.

Aufgabe 2**a) Flächeninhalt:**

Schnittpunkte $f(x) = g(x)$: $-x^2 = 2x - 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \dots x_1 = -3, x_2 = 1$.

$$\int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \dots \approx \boxed{10,67 \text{ FE}}$$

Der eingeschlossene Flächeninhalt beträgt $\boxed{10,67 \text{ FE}}$.

b) Integral:

$$\int_{-2}^2 \left(e^x + 2x^{\frac{1}{3}} - 4 \right) dx = \left[e^x + \frac{3}{2} x^{4/3} - 4x \right]_{-2}^2 = \dots \approx \boxed{9,25}$$

Aufgabe 3

$x(h, m) = 2(h \cdot m)^{\frac{1}{2}}, \quad q_h = 2, q_m = 8, \quad x = 500$.

a) Kostenminimierung mit Lagrange:

$$L = 2h + 8m + \lambda(500 - 2h^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{2}})$$

...

$$h = 4m \text{ oder } m = \frac{1}{4}h \Rightarrow m = 125, h = 500$$

Minimale Kosten: $K = 2 \cdot 500 + 8 \cdot 125 = \boxed{2000 \text{ €}}$

Das Unternehmen benötigt 500 ME Hopfen und 125 ME Malz bei min. Kosten von $\boxed{2000 \text{ €}}$.

b) Homogenitätsgrad:

$$x(\lambda h, \lambda m) = \dots = \lambda^1 \cdot x(h, m) \Rightarrow \boxed{\text{Homogenitätsgrad} = 1}$$

Die Produktionsfunktion ist homogen vom $\boxed{\text{Grad } 1}$.

c) Bei $\lambda = 2 \Rightarrow 2^1 = 2$: Die produzierte Menge $\boxed{\text{verdoppelt sich}}$.

d) Partielle Elastizität bzgl. Malz:

$$\varepsilon_m = x'_m \cdot \frac{m}{x} = \dots = \boxed{0,5 \text{ (unelastisch)}}$$

Eine Erhöhung des Malzeinsatzes um 1% führt zu einer Steigerung der Menge um $\boxed{0,5\%}$.

Aufgabe 4

a) **Determinante:**

$$\det(A) = \dots = \boxed{-3}$$

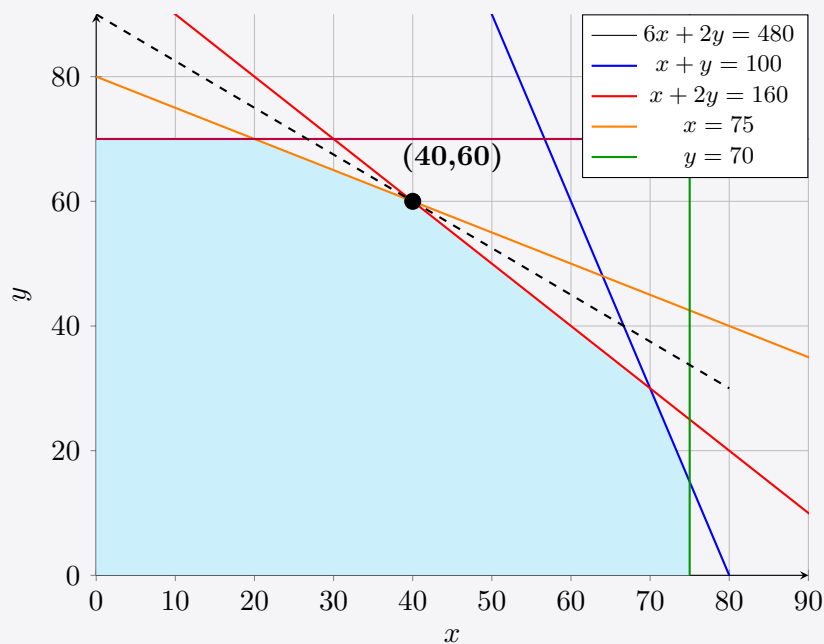
Da $\det(A) = -3 \neq 0$, ist das zugehörige Gleichungssystem **eindeutig lösbar**.

b) **Nachweis $B = A^{-1}$:** Zeige $A \cdot B = \text{Einheitsmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \text{Einheitsmatrix} \checkmark \Rightarrow \boxed{B = A^{-1}}$$

Aufgabe 5



$$\boxed{Z_{\max} = 360 \text{ bei } x = 40, y = 60}$$

Der maximale Zielfunktionswert beträgt $Z_{\max} = 360$ und wird im Punkt $(40 | 60)$ erreicht.

Probeklausur 2 – Kurzlösung

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

a) Nullstellen: $f(x) = (x - 1)^2(x + 2) = 0$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

Die Nullstellen sind die Punkte $(1 | 0)$ und $(-2 | 0)$.

b) Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = (0 - 1)^2(0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2$$

Der Ordinatenabschnitt ist der Punkt $(0 | 2)$.

c) Extremstellen:

Ausmultiplizieren: $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \dots \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei } x = 1, \quad f(1) = 0$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } x = -1, \quad f(-1) = 4$$

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum bei $(-1 | 4)$ und ein lokales Minimum bei $(1 | 0)$.

Aufgabe 2**a) Fläche:**

Nullstellen: $x^4 = 16 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$ (nur $x_1 = -2$ innerhalb $[-4, 1]$).

$$A = \int_{-4}^{-2} (x^4 - 16) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 16x \right]_{-4}^{-2} = \dots = \boxed{166,4 \text{ FE}}$$

$$B = \int_{-2}^1 (x^4 - 16) dx = \dots = \boxed{41,4 \text{ FE}}$$

Die gesamte Fläche im Intervall beträgt $\boxed{207,8 \text{ FE}}$.

b) Fläche zwischen f und g : Schnittpunkte $f(x) = g(x)$: $x^2 - 3 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \dots x_1 = -1, x_2 = 3$.

$$A = \int_{-1}^3 (2x - x^2 + 3) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^3 = \dots = \boxed{10,67 \text{ FE}}$$

Die Fläche zwischen f und g beträgt $\boxed{10,67 \text{ FE}}$.

c) Integral:

$$\int_3^6 \left(x - 1,5 x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x^{3/2} \right]_3^6 = \dots \approx \boxed{0,49}$$

Aufgabe 3a) **Gradient:**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y - 8 \\ -x + 4y - 8 \end{pmatrix}$$

b) **Nullstellen des Gradienten:**

$$\begin{aligned} 4x - y &= 8 \\ -x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

Aus (I): $y = 4x - 8$, einsetzen in (II): ...

$$(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

c) **Warum keine Extremstelle in $(1, 0)$:**

$$\nabla f(1, 0) = (-4, -9) \neq (0, 0).$$

Da der Gradient in $(1, 0)$ nicht Null ist, liegt dort **keine Extremstelle** vor (notwendige Bedingung nicht erfüllt).d) **Extremstelle klassifizieren:**

$$H_f\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f) = 15 > 0, \quad f_{xx} = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Minimum}$$

Es liegt ein rel. Minimum bei $\left(\frac{8}{3} \mid \frac{8}{3}\right)$ vor.

Aufgabe 4

a)

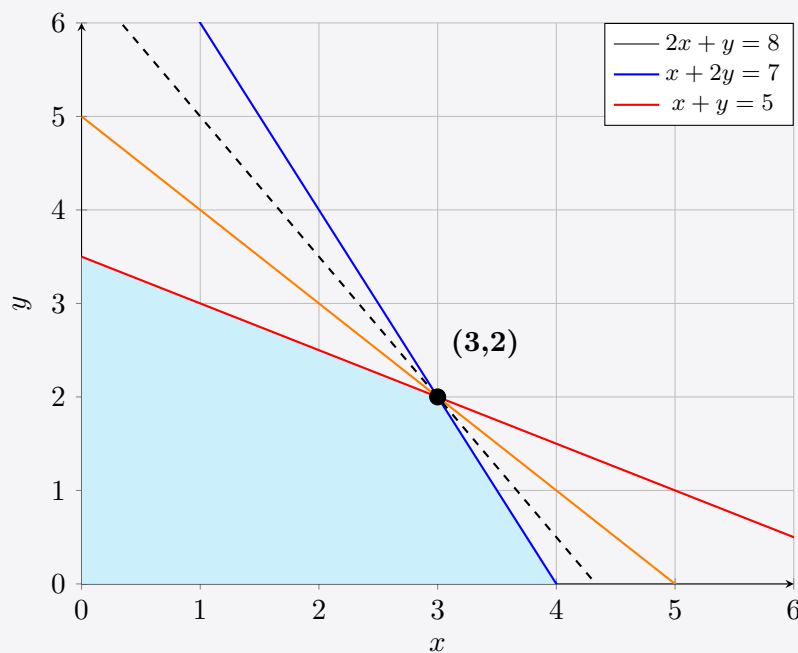
$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot B = \dots = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2(A^T \cdot B) - C = \dots = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} \cdot B^T = \dots = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$$Z_{\max} = 13 \quad \text{bei} \quad x = 3, \quad y = 2$$

Der maximale Zielfunktionswert beträgt $Z_{\max} = 13$ und wird im Punkt (3 | 2) erreicht.

Probeklausur 3 – Kurzlösung

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

Vorab: $K(x) = k(x) \cdot x = 2x^3 - 18x^2 + 60x + 50$, $K_v(x) = 2x^3 - 18x^2 + 60x$, $K_f = 50$.

a) Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x) = 80x - (2x^3 - 18x^2 + 60x + 50) = -2x^3 + 18x^2 + 20x - 50$$

b) Deckungsbeitragsfunktion:

$$G_D(x) = E(x) - K_v(x) = 80x - (2x^3 - 18x^2 + 60x) = -2x^3 + 18x^2 + 20x$$

c) Positiver Deckungsbeitrag:

$$\begin{aligned} G_D(x) &= 0 \\ -2x^3 + 18x^2 + 20x &= 0 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

Das Unternehmen erwirtschaftet einen positiven Deckungsbeitrag zwischen einer Menge von 0 und 10 ME.

d) Gewinnmaximum:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -6x^2 + 36x + 20 = 0 \quad \dots \quad x^* \approx 6,51 \\ G''(x) &= -12x + 36, \quad G''(6,51) \approx -42,12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \\ G(6,51) &\approx 291,33 \text{ GE} \end{aligned}$$

Das Gewinnmaximum beträgt 291,33 GE bei $x^* \approx 6,51$ ME.

e) Tangente bei $x = 10$:

$$\begin{aligned} G(10) &= -50, \quad G'(10) = -220 \\ t(x) &= G(x_0) + G'(x_0) \cdot (x - x_0) = -50 + (-220)(x - 10) = -220x + 2150 \end{aligned}$$

Aufgabe 2**a) Flächeninhalt:**

Nullstellen von $f(x) = x^2 - 4$: $x_{1,2} = \pm 2$. Da $x = 2 \notin [-3, 1]$, ist nur $x = -2$ relevant.

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-3}^{-2} = \dots = \boxed{1,33 \text{ FE}}$$

$$B = \int_{-2}^1 (x^2 - 4) dx = \dots = \boxed{9 \text{ FE}}$$

Die gesamte Fläche im Intervall $[-3, 1]$ beträgt $\boxed{10,33 \text{ FE}}$.

b) Fläche zwischen f und g : Schnittpunkte $f(x) = g(x)$: \dots $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

$$A = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \dots = \boxed{2,67 \text{ FE}}$$

Die Fläche zwischen f und g beträgt $\boxed{2,67 \text{ FE}}$.

Aufgabe 3

$$U(x, y) = x^{0,4} \cdot 2y^{0,6}, \quad p_x = 4, p_y = 6, \quad m = 240.$$

a) Nutzenmaximierung mit Lagrange:

$$L = x^{0,4} \cdot 2y^{0,6} + \lambda(240 - 4x - 6y)$$

\dots

$$y = x \Rightarrow \boxed{x^* = 24}, \quad \boxed{y^* = 24}$$

Maximaler Nutzen: $U(24, 24) = \boxed{48}$

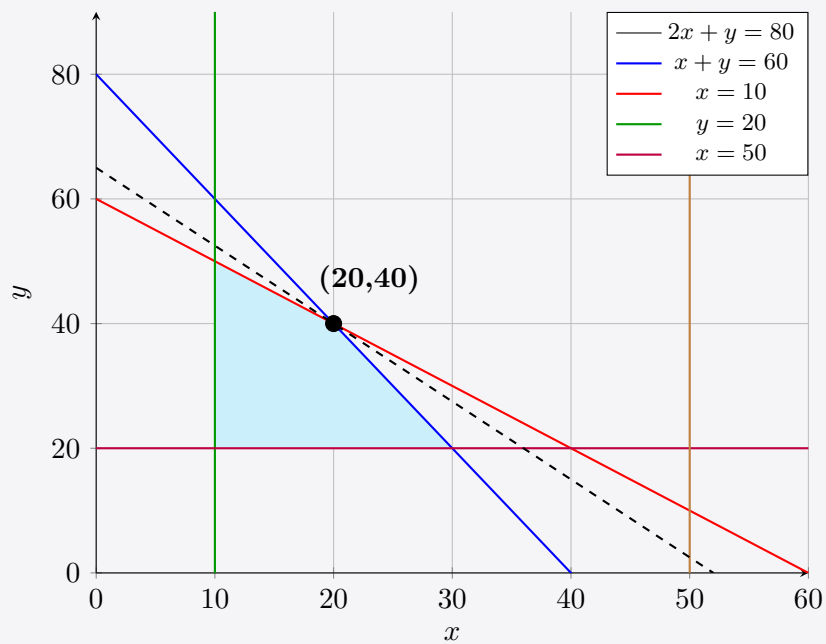
Der maximale Nutzen beträgt $\boxed{48 \text{ NE}}$ bei $\boxed{x^* = 24}$ und $\boxed{y^* = 24}$.

Aufgabe 4

Hinweis: $(A^T \cdot B^T)^T = B \cdot A$.

$$4 \cdot B \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 38 & 60 & 82 \\ 35 & 57 & 79 \\ 32 & 54 & 76 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 152 & 240 & 328 \\ 140 & 228 & 316 \\ 128 & 216 & 304 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5



$$Z_{\max} = 260 \quad \text{bei} \quad x = 20, y = 40$$

Der maximale Zielfunktionswert beträgt $Z_{\max} = 260$ Euro und wird im Punkt $(20 | 40)$ erreicht.

Probeklausur 4 – Kurzlösung

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

a) Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-9} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Die Nullstelle ist der Punkt $(0|0)$.

b) Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = \frac{0}{0-9} = 0$$

Der Ordinatenabschnitt ist der Punkt $(0|0)$.

c) Extremstellen:

$$f'(x) = \frac{2x(x-9) - x^2}{(x-9)^2} = \frac{x^2 - 18x}{(x-9)^2} = 0 \quad \dots \quad x_1 = 0, x_2 = 18$$

$$f''(x) = \frac{(2x-18)(x-9)^2 - (x^2-18x) \cdot 2(x-9)}{(x-9)^4}$$

$$f''(0) = -\frac{2}{9} < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } x = 0, f(0) = 0$$

$$f''(18) = \frac{2}{9} > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x = 18, f(18) = 36$$

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum bei $(0|0)$ und ein lokales Minimum bei $(18|36)$.

Aufgabe 2

Vorab: Nachfrage $p(x) = 20 - \frac{2}{3}x$, Angebot $p_A(x) = 10 + 2x$.

a) Marktgleichgewicht:

$$20 - \frac{2}{3}x = 10 + 2x \quad \dots \quad \Rightarrow \quad x^* = \boxed{3,75}, \quad p^* = \boxed{17,50}$$

b) Konsumentenrente:

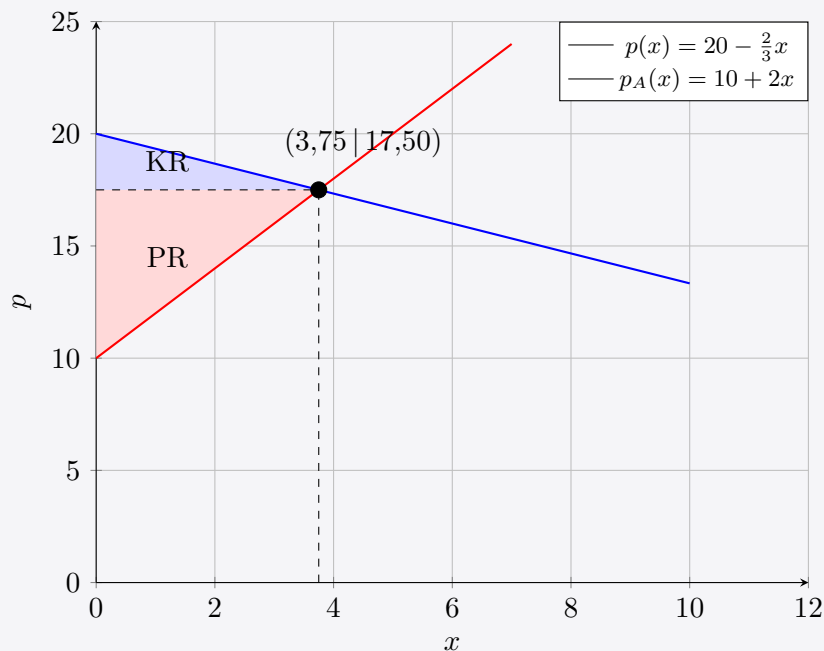
$$KR = \int_0^{3,75} (20 - \frac{2}{3}x) dx - 17,5 \cdot 3,75 = \dots = \boxed{4,69 \text{ GE}}$$

Die Konsumentenrente beträgt $\boxed{4,69 \text{ GE}}$.

c) Produzentenrente:

$$PR = 17,5 \cdot 3,75 - \int_0^{3,75} (10 + 2x) dx = \dots = \boxed{14,06 \text{ GE}}$$

Die Produzentenrente beträgt $\boxed{14,06 \text{ GE}}$.

d) Grafik:

Aufgabe 3

$$f(x, y) = x^2 \cdot y^{-1} + \ln(x \cdot y^2) + y^3$$

a) Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$f_x = 2x \cdot y^{-1} + \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 = 2x \cdot y^{-1} + x^{-1}$$

$$f_y = x^2 \cdot (-1) \cdot y^{-2} + \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy + 3y^2 = -x^2 y^{-2} + \frac{2}{y} + 3y^2 = -x^2 y^{-2} + 2y^{-1} + 3y^2$$

b) Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$f_{xx} = 2 \cdot y^{-1} - x^{-2}$$

$$f_{yy} = 2x^2 \cdot y^{-3} - 2 \cdot y^{-2} + 6y$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -2x \cdot y^{-2}$$

c) Warum kein Extremum in $(-1, 1)$: $\nabla f(-1, 1) = (-2 - 1, -1 + 2 + 3) = (-3, 4) \neq (0, 0)$. Da der Gradient in $(-1, 1)$ nicht Null ist, liegt dort **keine Extremstelle** vor (notwendige Bedingung nicht erfüllt).

Aufgabe 4

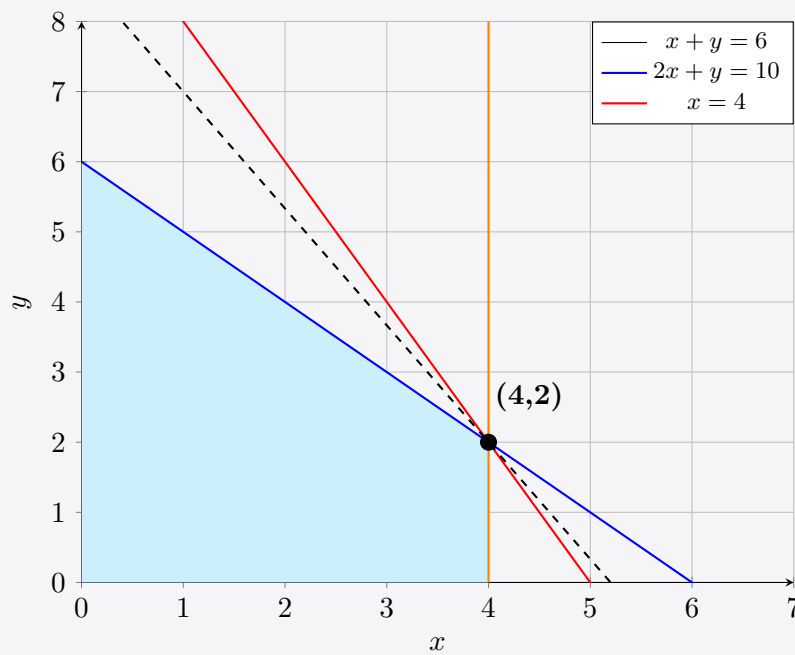
a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 10 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(A) = 4 - 6 = -2, \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5



$$Z_{\max} = 26 \quad \text{bei} \quad x = 4, y = 2$$

Der maximale Zielfunktionswert beträgt $Z_{\max} = 26$ und wird im Punkt $(4|2)$ erreicht.

Probeklausur 5 – Kurzlösung

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

a) Nullstellen:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 = x^3(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Die Nullstellen sind die Punkte $(0|0)$ und $(2|0)$.

b) Funktion $g(x)$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^4 - 2x^3}{x} = x^3 - 2x^2$$

c) Extrema von $g(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) = 0 \dots x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$$

$$g''(x) = 6x - 4$$

$$g''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } x = 0, g(0) = 0$$

$$g''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x = \frac{4}{3}, g\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{27}$$

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum bei $(0|0)$ und ein lokales Minimum bei $\left(\frac{4}{3} \mid -\frac{32}{27}\right)$.

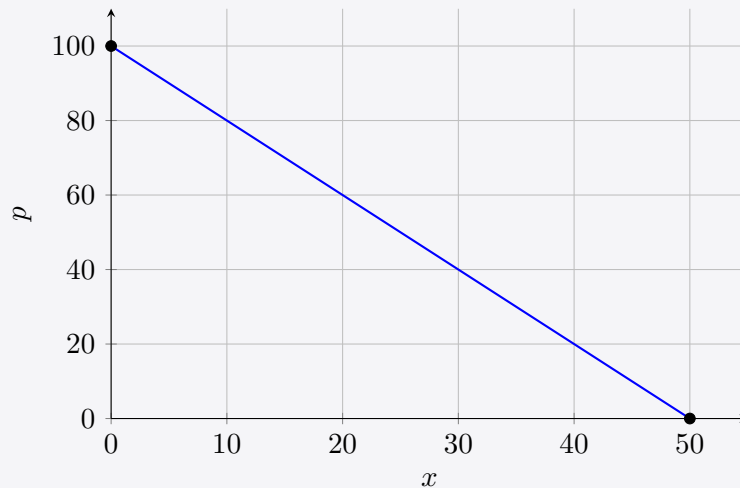
d) Ordinatenabschnitt:

$$g(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

Der Ordinatenabschnitt ist der Punkt $(0|0)$.

Aufgabe 2

$$p(x) = 100 - 2x, \quad x(p) = -0,5p + 50.$$

a) **Grafik:**b) **Preiselastizität bei $p = 25$:**

$$p = 25 \Rightarrow x = 37,5, \quad \varepsilon = x'(p) \cdot \frac{p}{x} = -0,5 \cdot \frac{25}{37,5} \approx -0,33 \text{ (unelastisch, da } |\varepsilon| < 1)$$

c) **Konsumentenrente bei $p = 25$:**

$$KR = \int_0^{37,5} (100 - 2x) dx - 25 \cdot 37,5 = \dots = 1406,25 \text{ GE}$$

Die Konsumentenrente beträgt 1406,25 GE.

d) **Maximaler Erlös:**

$$E(x) = p(x) \cdot x = 100x - 2x^2$$

$$E'(x) = 100 - 4x = 0 \quad \dots \quad x^* = 25$$

$$E''(x) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$E(25) = 2500 - 1250 = 1250 \text{ GE}$$

Der maximale Erlös beträgt 1250 GE bei $x^* = 25$ ME.

Aufgabe 3

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

a) Gradient:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$

b) Stationäre Punkte:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \Rightarrow y = x^2 \\ 3(x^2)^2 - 3x &= 0 \dots \end{aligned}$$

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 1)$$

c) Klassifikation:

$$\text{In } (0, 0): \quad H_f = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f) = -9 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\text{In } (1, 1): \quad H_f = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f) = 27 > 0, \quad f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Minimum}$$

Es liegt ein **Sattelpunkt** in $(0, 0)$ und ein **rel. Minimum** in $(1, 1)$ vor.

Aufgabe 4

a)

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A + C) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

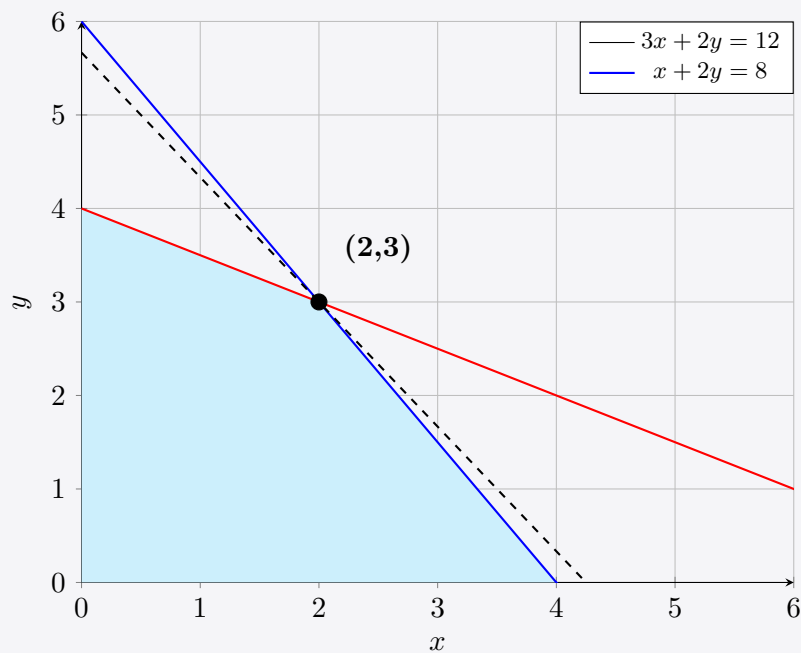
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} + C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5



$$Z_{\max} = 17 \quad \text{bei} \quad x = 2, y = 3$$

Der maximale Zielfunktionswert beträgt $Z_{\max} = 17$ und wird im Punkt $(2|3)$ erreicht.

Probeklausur 6 – Kurzlösung

Analysis & Lineare Algebra

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

$$f(x) = 2e^{x^3 - 1,5x^2}.$$

a) **Ordinatenabschnitt:**

$$f(0) = 2e^0 = \boxed{2}$$

Der Ordinatenabschnitt ist der Punkt $\boxed{(0 | 2)}$.

b) **Nullstellen:**

Da $e^{x^3 - 1,5x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt $f(x) = 2e^{x^3 - 1,5x^2} > 0$ für alle x .

⇒ $\boxed{\text{Keine Nullstellen.}}$

c) **Extremstellen:**

$$f'(x) = 2e^{x^3 - 1,5x^2} \cdot (3x^2 - 3x) = (6x^2 - 6x) \cdot e^{x^3 - 1,5x^2} = 0 \quad \dots \quad x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f''(x) = (12x - 6) \cdot e^{x^3 - 1,5x^2} + (6x^2 - 6x) \cdot e^{x^3 - 1,5x^2} (3x^2 - 3x)$$

$$f''(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } x = 0, f(0) = \boxed{2}$$

$$f''(1) \approx 3,64 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei } x = 1, f(1) \approx \boxed{1,21}$$

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum bei $\boxed{(0 | 2)}$ und ein lokales Minimum bei $\boxed{(1 | 1,21)}$.

Aufgabe 2

$$p(x) = -e^x + 9,39, \quad p(2) = -e^2 + 9,39 \approx 2.$$

Konsumentenrente bei $x = 2$:

$$\begin{aligned} KR &= \int_0^2 (p(x) - p(2)) dx = \int_0^2 (e^2 - e^x) dx = [e^2 \cdot x - e^x]_0^2 \\ &= (2e^2 - e^2) - (0 - 1) = e^2 + 1 \approx \boxed{8,39 \text{ GE}} \end{aligned}$$

Die Konsumentenrente beträgt $\boxed{8,39 \text{ GE}}$.

Aufgabe 3

$$f(x, y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2 + 1) - 3x.$$

a) **Gradient:**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x \ln(y^2 + 1) - 3 \\ \frac{-2x^2 y}{y^2 + 1} \end{pmatrix}$$

b) **Nullstellen des Gradienten:**

$$\text{Aus } f_y = 0: \frac{-2x^2 y}{y^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

$$x = 0: f_x = -3 \neq 0$$

$$y = 0: f_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (-1, 0)$$

c) **Klassifikation:** Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$f_{xx} = 6x - 2 \ln(y^2 + 1)$$

$$f_{yy} = \frac{-2x^2 \cdot (y^2 + 1) - (-2x^2 y) \cdot 2y}{(y^2 + 1)^2}$$

$$f_{yx} = \frac{-4xy \cdot (y^2 + 1) - (-2x^2 y) \cdot 0}{(y^2 + 1)^2}$$

$$\text{In } (1, 0): H_f = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\text{In } (-1, 0): H_f = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f) = 12 > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{rel. Maximum}$$

Es liegt ein **Sattelpunkt** in $(1, 0)$ und ein **rel. Maximum** in $(-1, 0)$ mit $f(-1, 0) = \mathbf{2}$ vor.

Aufgabe 4**a) Lineares Gleichungssystem (Cramersche Regel):**

$$-2x_1 + 4x_2 = 1 \quad (\text{I})$$

$$x_1 + 8x_2 = 2 \quad (\text{II})$$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -16 - 4 = -20,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{-20} = 0,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{-20} = 0,25$$

b) Vektor \vec{x} :

$$\det(A) = 0,5 \cdot 0,2 - (-2) \cdot 0,95 = 0,1 + 1,9 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,2 & 2 \\ -0,95 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 1 \\ -0,475 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,1 & 1 \\ -0,475 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,2 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

a) **Modul-Matrix M :** Sei $x_1 = \text{Robo-Dog}$, $x_2 = \text{Drone-Mini}$, $x_3 = \text{LED-Cube}$:

$$\begin{aligned} z_1 \text{ (Motoren)} &= 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 \\ z_2 \text{ (Sensoren)} &= 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \\ z_3 \text{ (LED-Panels)} &= 1x_1 + 0x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) **Rohmaterial-Matrix R :**

$$\begin{aligned} r_1 \text{ (Chips)} &= 2z_1 + 4z_2 + 1z_3 \\ r_2 \text{ (Kabel)} &= 5z_1 + 2z_2 + 6z_3 \\ r_3 \text{ (Lötzinn)} &= 3z_1 + 1z_2 + 2z_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_R \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

c) **Gesamt-Matrix:**

$$R \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 & 10 \\ 22 & 24 & 38 \\ 11 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

d) **Bestellung:** $\vec{x} = (12, 8, 5)^T$

$$R \cdot M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 & 16 & 10 \\ 22 & 24 & 38 \\ 11 & 14 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 382 \\ 646 \\ 309 \end{pmatrix}$$

Das Startup benötigt **382 Chips**, **646 Kabel** und **309 Lötzinn**.